Semestre 2	TD 5 de Mathématiques	2016-2017

Transformées de Laplace

Capacités attendues :
- Déterminer, notamment par calcul, la transformée de Laplace d'une fonction.
- Déterminer la transformée de Laplace inverse d'une fonction.
- Résoudre une équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 1 : $\star\star$
Représenter les signaux suivants ci-dessous et déterminer, par calcul, la transformée de laplace associée.

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) \quad \text{et} \quad g(t) = u(t) - u(t-2)$$

Exercice 2 : ⋆⋆

Déterminer, par calcul, la transformée de Laplace de la fonction f définie par

$$f(t) = tu(t)$$

Exercice 3 : ⋆⋆⋆

Déterminer le domaine de définition de la fonction F (d'une variable réelle) définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 : ⋆

Représenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f : t \mapsto \sin(t)\, u(t) \qquad f_1 : t \mapsto \sin(t)\, u\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$f_2 : t \mapsto u(t) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \qquad f_3 : t \mapsto \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) u\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$h : t \mapsto 2t\,[u(t) - u(t-1)] \qquad h_1 : t \mapsto \sum_{k=0}^{3} h(t-k)$$

Exercice 5 : $\star\star$

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions définies par :

$$f(t) = [4 + 2\cos(3t)]\, u(t) \qquad g(t) = [5 + 3\sin(3t)]\, u(t)$$
$$h(t) = (2t^3 - 1)\, u(t) \qquad i(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2t})\sin(3t)\, u(t)$$
$$j(t) = \left[2\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{3}\right)\right] u(t) \qquad k(t) = 2^{-t}\left[u(t) - u(t-2)\right]$$

Exercice 6 : $\star\star$

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions définies par :

$$f(t) = \left[te^{-3t}\right] u(t) \quad \text{et} \quad g(t) = [(2t+3)\cos(\omega t)]\, u(t)$$

Exercice 7 : $\star\star$

Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \frac{\pi}{3} \\ 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & \text{si} \quad t \geq \frac{\pi}{3} \end{cases} .$$

Exercice 8 : $\star\star$

Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fraction rationnelle F définie par

$$F(p) = \frac{2}{p^2 - 1}$$

Exercice 9 : $\star\star$
Déterminer la transformée de Laplace inverse des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(p) = \frac{2p+1}{p^2-4p-5} \qquad F_2(p) = \frac{p^2+1}{p^2-p}$$
$$F_3(p) = \frac{p+1}{(p+3)^2} \qquad F_4(p) = \frac{3}{(p^2+2p+3)(p-1)}$$

Exercice 10 : $\star\star$
En utilisant la transformation de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y" + 4y = -6\cos(t)u\,(t)$ avec $y\,(0) = -1$ et $y'\,(0) = 0$.
2. $y' + y = \cos\,(t)\,u(t)$
3. $x" + 2x' + 3x = 3\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ avec $x\,(0) = 0$ et $x'\,(0) = 0$.

Exercice 11 : $\star\star$
Résoudre, à l'aide de la transformée de Laplace, l'équation différentielle (E) définie sur $[0;+\infty[$ (τ, E_1 et E_2 étant des constantes)

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = E_2 \\ v(0) = E_1 \end{array} \right.$$

Exercice 12 : $\star\star\star$
Soit $F\,(p) = \dfrac{N\,(p)}{D\,(p)}$ avec N et D deux polynômes de $\mathbb{R}\,[X]$ tels que $\deg(N) < \deg(P)$.
On suppose, en outre, que F possède uniquement deux pôles complexes conjugués simples de la forme $\alpha = a \pm jb$.

1. Démontrer que son original est de la forme $f : t \mapsto K\mathrm{e}^{a\,t}\sin\,(bt+\varphi)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les pôles complexes pour que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.