Semestre 1	TD 4 de Mathématiques	2017-2018

APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues autour des applications des nombres complexes :
- Factoriser un polynôme.
- Manipuler les impédances complexes.

Polynômes

Exercice 1 : $\star$
Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^2 + 8X + 6 \quad ; \quad Q(X) = -X^2 + 4X - 4 \quad ; \quad R(X) = X^2 - 2X + 2$$

Exercice 2 : $\star$

On considère le polynôme

$$S(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$$

Après avoir déterminé une racine (évidente), factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, ce polynôme.

Exercice 3 : $\star$

Factoriser le polynôme $R(X) = X^4 - X^3 + X^2 - 11X + 10$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : ⋆⋆
Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :
$A(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
$B(X) = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19X + 10$.
$C(X) = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 + X + 1$.
$D(X) = 2X^4 + 2X^3 - 2X - 2$.

Exercice 5 : ⋆⋆⋆
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P(X) = X^5 - 1$$
$$Q(X) = 2X^3 - X^2 - 2X + 6$$

Indication pour la seconde factorisation : on pourra calculer $Q(1+j)$.

Exercice 6 : ⋆⋆⋆
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$$

Applications à l'électricité

Exercice 7 : ⋆⋆
On considère une association en série d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L.
Cet ensemble est mis en parallèle avec un condensateur de capacité C.

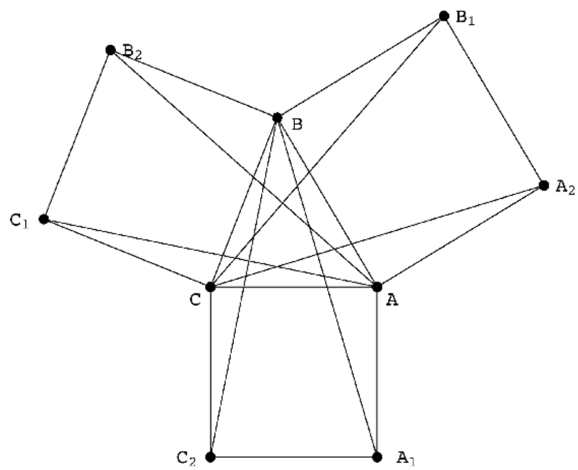
Aux bornes de ce circuit, on applique une tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(\omega t)$.
On se place en régime permanent.

1. Faire un schéma et rappeler les expressions des impédances complexes associées.
2. Donner les expressions de $\underline{Z}(\omega)$ et de son module.
3. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de ω a-t-on $\underline{Z}(\omega)$ réel ?
   (b) Envisager le cas particulier où R^2C est négligeable devant L.

Exercice 8 : (d'après concours ENSEA 2007) ⋆⋆⋆
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère trois points quelconques non alignés A,B,C d'affixe a, b, c respectivement. Le triangle ABC est quelconque mais les sommets sont donnés dans le sens direct comme dans la figure ci-contre.
Soient les nombres complexes :

$$\begin{array}{lll} a_1 = a + (c-a)\,i & b_1 = b + (a-b)\,i & c_1 = c + (b-c)\,i \\ a_2 = a - (b-a)\,i & b_2 = b - (c-b)\,i & c_2 = c - (a-c)\,i. \end{array}$$

Les points sont donnés par leurs affixes :
$\mathrm{A}_1\,(a_1)$, $\mathrm{B}_1\,(b_1)$, $\mathrm{C}_1\,(c_1)$, $\mathrm{A}_2\,(a_2)$, $\mathrm{B}_2\,(b_2)$, $\mathrm{C}_2\,(c_2)$.



1. Passe-t-on de C à A_1 par une rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$?
2. Les segments $[\mathrm{BA}_1]$ et $[\mathrm{CA}_2]$ ont-ils toujours la même longueur ?
3. Les droites (BA_1) et (CA_2) sont-elles toujours orthogonales ?
4. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ a-t-il pour affixe $(b+c)i$?
5. A-t-on : $\mathrm{A_1A_2}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{CA}^2 + (a-b)\left(\overline{a}-\overline{c}\right) + (a-c)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$?