Semestre 1	TD 2 de Mathématiques	2016-2017

LES NOMBRES COMPLEXES

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des $\star$ avec la signification suivante :
$\star$: exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).
$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.
$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

Capacités attendues autour des nombres complexes :
- Calculer le module et un argument d'un nombre complexe.
- Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.
- Savoir linéariser une expression du type $\sin^n x$ ou $\cos^n x$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients complexes.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation faisant référence aux racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 1 : $\star$
Soit z le nombre complexe défini par : $z = 5e^{\frac{j\pi}{3}}$.
Déterminer le module et un argument (sous forme de mesure principale) de :

$$\overline{z} \quad ; \quad z\overline{z} \quad ; \quad -z \quad ; \quad z+\overline{z} \quad ; \quad \frac{1}{z} \quad ; \quad z^{100} \quad ; \quad \frac{z}{\overline{z}}.$$

Exercice 2 : $\star$
Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$5 \;;\quad 8j \;;\quad -3j \;;\quad \sqrt{3}+3j \;;\quad \left(\sqrt{3}+3j\right)^6 \;;\quad 1+j\sqrt{3} \;;\quad \frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}.$$

Exercice 3 : $\star\star$
Soient $z_1 = 1+j\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2}+j\sqrt{2}$.
Donner le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 : $\star\star$
Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants avec $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$z_1 = \mathrm{e}^{j\theta}+\mathrm{e}^{-j\theta} \quad;\quad z_2 = \mathrm{e}^{j\theta}+\mathrm{e}^{3j\theta} \quad;\quad z_3 = 1+\mathrm{e}^{j\theta} \quad;\quad z_4 = 1-\mathrm{e}^{j\theta}\ .$$

Exercice 5 : $\star\star\star$
Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants avec $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:
$z = (1+j\tan\theta\,)^2$ et $z' = \frac{\cos\theta\,-j\sin\theta}{\sin\theta\,-j\cos\theta}$.

Exercice 6 : $\star\star$
Simplifier $\left(1+j\sqrt{3}\right)^n - \left(1-j\sqrt{3}\right)^n$.

Exercice 7 : $\star\star$
Donner le module et un argument de $1 - \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 8 : $\star\star$
Calculer $\left(1 + j\sqrt{3}\right)^{100}$ et $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{20}$.

Exercice 9 : (Linéarisations) $\star\star$
Linéariser les expressions suivantes :
- $\sin^2 x$;
- $\cos^2 x$;
- $\sin^3 x$;
- $\sin^4 x$.

Exercice 10 : $\star\star\star$
Exprimer en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ les deux expressions suivantes :
$\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.

Exercice 11 : (Équations du second degré) $\star\star$
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
$r^2 + 4 = 0$; $\quad z^2 = -8 + 6j$.

Exercice 12 : (Équations du second degré) $\star\star$
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
$z^2 - j\sqrt{3}z + 1 = 0$; $z^2 - 2jz + 2 - 4j = 0$.

Exercice 13 : $\star\star$
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
$z = (1+j)\,\bar{z} + 3 - 2j$; $z^6 = 1$; $z^5 - 32 = 0$; $(z-j)^3 = -1$; $z^5 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1 - j\sqrt{3}\right)$.

Exercice 14 : $\star\star$
On pose : $a = \mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{3}}$. Calculer $1 + a + a^2$.

Exercice 15 : (Résolution d'une équation bicarrée) $\star\star\star$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^4 - 2X^2\cos\varphi + 1 = 0$ avec $\varphi \in]0;\pi]$.

Exercice 16 : (Construction d'un pentagone régulier) $\star\star\star$
On considère $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega + \omega^4$ est solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$.
2. Exprimer $\omega + \omega^4$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et en déduire la construction d'un pentagone régulier.