université de BORDEAUX

geii Génie électrique et informatique industrielle / iut de BORDEAUX

Année universitaire 2018-2019

COURS DE MATHÉMATIQUES

Modules M 2201 & M 2302

SEMESTRE 2

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Table des matières

Chapitre 1

DÉVELOPPEMENTS LIMITES

I Théorème de Rolle

Théorème 1 : (Théorème de Rolle)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

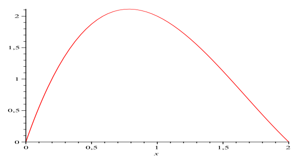

FIGURE 1.1 – Illustration du théorème de Rolle

II Formule des accroissements finis

Théorème 2 : (TAF)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
Il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

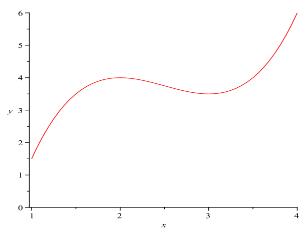

FIGURE 1.2 – Illustration du TAF

Démonstration : Posons $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.

D'après l'énoncé du TAF, il existe $c \in]a;b[$ tel que : $f(b) = f(a) + f'(c)\,(b - a)$.

III Formules de Taylor

III.1 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 3 : (Formule de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur $[a;b]$ et dérivable à l'ordre $(n+1)$ sur $]a;b[$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration :
La formule de Taylor-Lagrange est une conséquence directe du théorème de Rolle.

Introduisons la fonction g définie par : $g(x) = f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - K(b-x)^{n+1}$ où K est choisi de sorte que $g(a) = 0$. Ainsi : $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = K(b-a)^{n+1}$.
Puisque $g(a) = g(b) = 0$, le théorème de Rolle permet de justifier l'existence d'un réel $c \in]a;b[$ tel que : $g'(c) = 0$.
Or : $g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + K(n+1)(b-x)^n$ donc $-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + K(n+1)(b-c)^n = 0$.
Comme $a < c < b$, on a : $b - c \neq 0$ donc $-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} + K(n+1) = 0$.
On a donc : $K(n+1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}$ soit $K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.
Il en résulte que : $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$. $\square$

Remarque 1 :
En considérant les mêmes hypothèses, avec $a = 0$ et $b = x$, il existe c compris entre 0 et x tel que :

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ .}$$

Exercice 1.1 *Déterminer une approximation de la fonction* sin *au voisinage de* 0 *par un polynôme de degré* 3 *en utilisant la formule de Taylor-Lagrange.*

On en déduit une majoration de l'erreur qui est la suivante : $\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \left|\frac{x^4}{4!}\right|$.

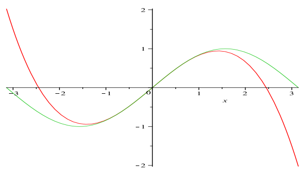

Figure 1.3 – Courbes représentatives de sin et $x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$

III.2 Formule de Taylor-Young

On rappelle que, sous certaines hypothèses, on a :
$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ où c est entre a et x.
Considérons le reste $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$. En divisant par $(x-a)^n$, on obtient : $\frac{x-a}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.
Si $f^{n+1}(c)$ est fini alors ce quotient tend vers 0 lorsque x tend vers a.
Plus généralement, on a le théorème ci-dessous.

Théorème 4 : (Formule de Taylor-Young)
Si la fonction f est dérivable en a jusqu'à l'ordre n alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Remarque 2 :

Si f est une fonction dérivable n fois en 0 alors f peut s'écrire :
$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

IV Equivalents

Définition 1 :
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
On dit que f est équivalente à g en a, et on note $f \underset{a}{\sim} g$, s'il existe une fonction ε définie sur V telle que :
$\forall x \in V, f(x) = [1+\varepsilon(x)]\ g(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Théorème 5 :
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
Si g est non nulle au voisinage de a, on a :

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ si et seulement si } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 1 $x \mapsto x^2 + 6x - 7$ *et* $x \mapsto x^2$ *sont équivalentes en* $+\infty$.

Remarque 3 : En l'infini, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Propriété 1 :
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
- Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Remarque 4 : Les équivalents sont conservés par produit et quotient d'après ce qui précède mais ils ne le sont **ni par sommation, ni par composition**.
Par exemple, considérons e^{x+1} et e^x :

Exercice 1.2 *Utilisation d'équivalents*

1. *Déterminer un équivalent, en* $+\infty$*, de* $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{2x^3 + x^2 - 1}$.
2. *Déterminer un équivalent en* 0 *de* $g : x \mapsto \sin(2x)\ln(1+x)$ *et en déduire* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2}$.

V Développements limités

V.1 Généralités

DÉFINITION 2 : Soit f est une fonction définie au voisinage de a.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe un polynôme P de degré n (appelée partie régulière du DL) tel que :

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

REMARQUE 5 : Si f est une fonction définie au voisinage de 0, f admet un DL d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P de degré n tel que :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

REMARQUE 6 : (DL et Formule de Taylor-Lagrange)
La formule de Taylor-Young assure qu'une fonction f, dérivable n fois au point a, admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.
On a :

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.}$$

REMARQUE 7 : (DL d'orde 1 et tangente)
Si f est dérivable en a alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.
La partie régulière $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ est à rapprocher de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

V.2 Développements limités en 0

PROPRIÉTÉ 2 : (DL au voisinage de 0)
Une fonction f, dérivable n fois en 0, admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. On a :

- $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
- $f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

PROPRIÉTÉ 3 :

- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ ($n \geq 1$) alors f est dérivable en 0.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui-ci est unique (P et ε uniques).
- P a la même parité que f.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors elle admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ pour tout $p \leq n$.

Déterminons des DL(0) des fonctions : $\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$; $g : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $h : x \mapsto \sin x$.
Ces fonctions étant infiniment dérivables, on peut utiliser la formule de Taylor-Young :
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Théorème 6 : (DL en 0)

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$

$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$

Exercice 1.3 *Déterminer le* $DL_3(0)$ *des fonctions* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *et* $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Propriété 4 : (Opérations sur les DL)

Soient f et g admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g.

- La somme $f+g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P_f + P_g$.
- Le produit fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. La partie régulière s'obtient en effectuant $P_f \times P_g$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 1.4 *Déterminer le* $DL_2(0)$ *de* $x \mapsto e^x \times \sqrt{1+x}$.

Propriété 5 : (Dérivation et intégration)

- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et vérifie les hypothèses du théorème de Taylor-Young, f' admet un d'ordre $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ et $P_{f'} = (P_f)'$.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ et P_F s'obtient en intégrant P_f avec $P_F(0) = F(0)$.

Exercice 1.5 *Déterminer le* $DL_n(0)$ *de* $x \mapsto \ln(1+x)$ *et le* $DL_{2n}(0)$ *de* $\cos$.

Théorème 7 : (DL en 0)

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$

Propriété 6 : (DL de fonctions composées)

Si $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie principale $P_f \circ P_g$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 1.6 *DL et composées*

1. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto e^{\sin x}$.
2. *Déterminer le* $DL_4(0)$ *de* $x \mapsto -\ln(\cos x)$ *et en déduire le* $DL_3(0)$ *de* $\tan$.

Remarque 8 : Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ alors elle est dérivable (il y a équivalence).
Cette implication n'est pas vraie dans le cas d'un ordre $n > 1$.
En effet, la fonction f définie par : $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ car $f(x) = x^2\varepsilon(x)$.
f est dérivable et on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$ (cf. limite du taux d'accroissement).
f' n'est pas continue en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0 ce qui permet de conclure que $f"(0)$ n'est pas défini.
Voici donc un exemple de fonction dont la dérivée seconde n'est pas définie en 0 mais qui admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.

Exercice 1.7 *DL d'un inverse*

Méthode :
Supposons que $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $a_0 \neq 0$ au voisinage de 0.
En écrivant $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1+\left(\frac{a_1}{a_0}x+...+\frac{a_n}{a_0}x^n+x^n\varepsilon(x)\right)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1+u}$ on peut former un développement limité à l'ordre n de f en 0 ...

Application : Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$.

V.3 Développement en un réel x_0 non nul

Méthode :
Pour déterminer un développement limité en x_0 d'une fonction f, on relocalise le problème en 0 via le changement de variable $x = x_0 + h$.
On détermine alors un développement limité en 0 de la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ puis on transpose ce DL en développement limité en x_0 en remplaçant h par $x - x_0$.

Exercice 1.8 *Déterminer le DL d'ordre* 2 *de* ln *en* 3.

V.4 Notion de développement asymptotique

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.
On appelle développement asymptotique d'une fonction f en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^n}$, toute écriture $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Propriété 7 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$.
f admet un développement asymptotique en $+\infty$ si $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL en 0.
Dans ce cas $P_f(x) = P_g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1.9 *Déterminer le développement asymptotique de f en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^3}$ pour la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

V.5 Applications des développements limités

V.5.1 Calcul de limites

Exercice 1.10 *Déterminer, si elle existe,* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{\tan(x)}$.

V.5.2 Etude de branche infinie

Exercice 1.11 *Déterminer la position relative de la courbe représentative de* $f : x \mapsto \sqrt{x^2+4x}$ *par rapport à son asymptote au voisinage de* $+\infty$.

Chapitre 2

INTÉGRALES IMPROPRES

I Généralités

I.1 Fonctions localement intégrables

DÉFINITION 1 : Une fonction définie sur un intervalle I est localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle I.

On rappelle que toute fonction continue sur un fermé borné est intégrable.
On pourra donc utiliser la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1 : Toute fonction continue est localement intégrable.

I.2 Définition

DÉFINITION 2 : Soit $[a;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to b} \int_a^x f$ existe et est finie.

Sinon, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

REMARQUE 1 : Cette définition s'étend aux intervalles de la forme $]a;b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.1 *Étudier la nature des intégrales suivantes :* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$.

Exercice 2.2 *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$.

Théorème 1 :

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell > 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente.

Démonstration :

Corollaire 1 : Soit f est une fonction continue, positive sur $\mathbb{R}^+$ et admettant une limite en $+\infty$.
Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Remarque 2 : Soit f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ peut converger mais ce n'est pas certain ...

En effet, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ est divergente.

Il s'agit donc d'une condition **nécessaire mais pas suffisante** !

II Propriétés

PROPRIÉTÉ 2 :

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_I f$ converge.

  Pour tous a, b, c distincts éléments ou extrémités de I, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ avec convergence des intégrales engagées.
- Une combinaison linéaire de fonctions dont l'intégrale converge fournit une intégrale convergente.

REMARQUE 3 : On peut avoir deux bornes d'intégration généralisées, par exemple $-\infty$ et $+\infty$, il faut impérativement couper l'intégrale et étudier séparément chaque borne.

Théorème 2 : (Intégrales de Riemann)

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration du premier point :

III Intégration de fonctions positives

Le comportement de fonctions positives est un cas particulier plus simple car la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ est croissante. Dans cette partie, nous considérerons des fonctions définies sur $[a; b[$.
On rappelle que si F est majorée alors elle admet une limite finie.
Si F n'est pas majorée alors F diverge vers $+\infty$.

Propriété 3 : Soit f une fonction positive définie sur $[a; b[$.
$\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a; b[$.

Remarque 4 : Si $\int_a^b f$ diverge alors cette intégrale diverge vers $+\infty$.

Théorème 3 : (Théorème de comparaison)
Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b[$ telles que $0 \leq f \leq g$.

- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
- Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

Démonstration

Exercice 2.3 *Étudier la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\, dt$.

Théorème 4 : (Intégrales de fonctions équivalentes)
Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b[$. Si, au voisinage de b, les fonctions positives f et g sont équivalentes alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Démonstration dans le cas où b correspond à $+\infty$:

Exercice 2.4 *Montrer que* $\int_1^{+\infty} \frac{3}{t(t+1)}\, dt$ *est convergente et la calculer.*

IV Intégration par parties et changement de variables

Théorème 5 : Si f et g sont deux fonctions dérivables, à dérivées continues, sur $[a;b[$ alors pour tout $x \in [a;b[$, $\displaystyle\int_a^x f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$.
Si ces deux expressions ont une limite finie en b alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 6 : Si φ est dérivable, à dérivée continue et réalise une bijection croissante de $[a;b[$ dans $[\alpha;\beta[$ et si f est continue sur $[\alpha;\beta[$ alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.
De plus, en cas de convergence, on a

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Exercice 2.5 *En admettant sa convergence, calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$.

Exercice 2.6 *A l'aide d'un changement de variable* $u = \sqrt{t}$*, déterminer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$.

V Absolue convergence

Théorème 7 :
Si f une fonction définie sur I telle que $\int_I |\, f \,|$ converge alors $\int_I f$ converge et on a

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |\, f \,|$$

Démonstration dans le cas d'une fonction réelle :

- Cas où f est à valeurs positives : C'est immédiat compte tenu des résultats qui précèdent.
- Cas où f est à valeurs quelconques :
  On pose : $f_+ = \sup(f, 0)$ et $f_- = \sup(-f, 0)$.
  Les fonctions f_+, f_- sont définies sur I, positives, continues par morceaux et vérifient

  $$f = f_+ - f_-$$

  On a aussi :
  $$0 \leq f_+ \leq |f| \quad \text{et} \quad 0 \leq f_- \leq |f|$$
  On suppose que $\int f$ converge donc, par comparaison, $\int f_+$ et $\int f_-$ convergent.
  Or $f = f_+ - f_-$ donc $\int f$ converge également.
  En outre, $-|f| \leq f \leq |f|$ donc $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |\, f \,|$.

Exercice 2.7 *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Chapitre 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I Equations différentielles du premier ordre

I.1 Généralités

DÉFINITION 1 : Une équation différentielle est du 1$^{\text{er}}$ ordre si elle ne fait intervenir que la dérivée première d'une fonction.

DÉFINITION 2 : (Equations différentielles linéaires d'ordre 1)
On appelle équation différentielle linéaire du 1$^{\text{er}}$ ordre sur I toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (E)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur I de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$.
On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (E_H).$$

Lorsque les fonctions a et b sont constantes, on parle d'équation à coefficients constants.

Exemple 2 *Différents types d'EDL d'ordre* 1

- $y' + xy = x$ *est une équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}$.
- $y'(x) + xy = 0$ *est l'équation homogène associée.*
- $y' + 2y = 4$ *est une équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}$ *à coefficients constants.*

Théorème 1 : Soient a, b et c des fonctions définies et continues sur I.
Si y_p est une solution particulière de (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y_p(x) + y_H(x)$$

avec y_H solution de l'équation homogène.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_H) une solution (particulière) de (E).

Démonstration :

PROPRIÉTÉ 4 : (Principe de superposition)
Considérons une équation différentielle du type : $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.
Si, pour $i \in \{1; 2\}$, y_i est solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b_i(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution (particulière) de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

En effet, si on a : $\begin{cases} y_1' + ay_1 = b_1 \\ y_2' + ay_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow (y_1 + y_2)' + a\,(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$.

I.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 2 : Les solutions de l'ED $y' = a(x)y$ sont de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{A(x)}$ où A est une primitive de a et C est une constante (réelle).

Démonstration : Considérons la fonction $f : x \mapsto y(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$.

Exercice 3.1 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : y' + xy = 0$.

REMARQUE 1 : Pour résoudre une telle équation différentielle du 1^er ordre, on peut utiliser la méthode de séparation des variables.
(E) est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme $f(y) \times y' = g(x)$.
On note parfois : $f(y)\ \mathrm{d}y = g(x)\ \mathrm{d}x$. Si F et G sont respectivement des primitives de f et g, on obtient alors : $F(y) = G(x) + K$ où K est une constante (réelle).

Exercice 3.2 *Résoudre, sur* $]1; +\infty[$*, l'équation différentielle* $xy' \ln x = (3\ln x + 1)\,y$.

Remarque importante : On ne peut résoudre “ proprement ” (EH) uniquement sur les intervalles où les fonctions considérées sont continues. Pour une solution “globale ”, il faut s'assurer que les solutions peuvent être prolongées.

I.3 Recherche de solutions particulières

I.3.1 Cas particuliers

Considérons une équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.
Dans un premier temps, on peut chercher une solution particulière de ”même nature” que le second membre.

- Si $b(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- Si $b(x) = P(x)$ où P est un polynôme alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme (souvent de même degré).
- Si $b(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\cos(\alpha x) + K'\sin(\alpha x)$.

Exercice 3.3 *Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des réels non nuls.*

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont donc les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.

Exercice 3.4 *Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ avec $y(0) = 4$.*

I.3.2 Méthode de la variation de la constante

Pour déterminer une solution particulière, on peut également la rechercher par la méthode de variation de la constante qui suit :
On rappelle que $(E_H) : y' + a(x)y = 0$ admet pour solution : $y_H : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de a.
On cherche désormais y_p de la forme

$$y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$$

avec C fonction dérivable. On a alors :
$y_p' + a(x)y_p = C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} - a(x)C(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)C(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$.
Par suite y_p est solution de (E) si et seulement si $C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x)$.
Par détermination de primitive, on trouve C puis y_p ...

Exercice 3.5 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* $y' + y = x^2 + e^{-x}$.

II Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

II.1 Généralités

DÉFINITION 3 : Une équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre, à coefficients constants, est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$ay" + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$) et f une fonction continue sur I.
On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$ay" + by' + cy = 0 \quad (E_H).$$

On appelle équation caractéristique associée l'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E_C).$$

Exemple 3 $y'' + y' - 2y = x$ *est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.*

(E_H) : ....

(E_C) : ....

II.2 Résolution de l'équation homogène

PROPRIÉTÉ 5 :

- Si y_1 et y_2 sont deux solutions (non proportionnelles) de (E_H) alors toutes les solutions de (E_H) sont de la forme $Ay_1 + By_2$ (A et B étant des constantes réelles).
- L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_H) une solution (particulière) de (E).

Déterminons une condition pour que la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{rx} \quad (r \in \mathbb{C})$ soit solution de l'équation homogène $ay" + by' + cy = 0$:

Théorème 3 : (Solutions de $(E_H) : ay" + by' + cy = 0$ dans le cadre réel)

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes α et β.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme
  $$x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$$
  avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution α.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme
  $$x \mapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$
  avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme
  $$x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\,(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x))$$
  avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$ soit $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où α est une racine de (E_C).
z est deux fois dérivable et on a : $y'(x) = (z' + \alpha z)\mathrm{e}^{\alpha x}$ et $y"(x) = (z" + 2\alpha z' + \alpha^2 z)\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Ainsi, si y est solution de $(E_H) : ay" + by' + cy = 0$ alors $\left[az" + 2a\alpha z' + a\alpha^2 z + bz' + b\alpha z + cz\right]\mathrm{e}^{\alpha x} = 0$.
Il en résulte que : $az" + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = 0$ avec α est une racine de (E_C).
On a donc : $az" + (2a\alpha + b)z' = 0$.

- Cas où (E_C) admet deux racines distinctes $(\Delta > 0)$
  Si β est l'autre solution de (E_C), on a : $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ donc $2a\alpha + b = 2a\alpha - a(\alpha + \beta) = a(\alpha - \beta)$. On a donc : $az" + a(\alpha - \beta)z' = 0$.
  z' est donc solution de l'ED $ay' + a(\alpha - \beta)' = 0$ soit $y' + (\alpha - \beta)y = 0$.
  D'après le premier paragraphe, on a : $z'(x) = C\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)x}$ soit $z(x) = A\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)x} + B$ où $A = \frac{C}{\beta-\alpha}$.
  L'égalité $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ induit $y(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$ avec A et B réels quelconques.
- Cas où (E_C) admet une unique racine $(\Delta = 0)$
  $az" + a(\alpha - \beta)z' = 0$ conduit à $z" = 0$ car $\alpha = \frac{-b}{2a}$. Il s'avère que :
  $z" = 0$ ssi $z(x) = Ax + B$ avec A et B réels quelconques.
  On a donc : $y(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$ avec A et B réels quelconques.
- Cas où (E_C) admet deux racines complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$ $(\Delta > 0)$
  D'après ce qui précède, les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{(\lambda+j\mu)x} + D\mathrm{e}^{(\lambda-j\mu)x}$ où C et D sont des nombres complexes.
  Or, $C\mathrm{e}^{(\lambda+j\mu)x} + D\mathrm{e}^{(\lambda-j\mu)x} = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(C\mathrm{e}^{j\mu x} + D\mathrm{e}^{-j\mu x}\right)$ et $C\mathrm{e}^{j\mu x} + D\mathrm{e}^{-j\mu x} = (C + D)\cos(\mu x) + j(C - D)\sin(\mu x)$.
  Comme $y(0)$ et $y\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)$ doivent être réels, on en déduit que $C + D$ et $j(C - D)$ sont réels (notés respectivement A et B).
  Ainsi, les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\,(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x))$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 3.6 *Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y" + y = 0$.*

II.3 Résolution de l'équation complète

Pour chercher une solution particulière, on se contentera de chercher des solutions de même nature que le second membre.

Exercice 3.7 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$, *l'équation différentielle* $y" + y' - 2y = x$.

Exercice 3.8 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* $y" + y' + y = e^{-x}$.

Chapitre 4

SUITES

I Généralités

DÉFINITION 1 : On appelle suite réelle (ou numérique) toute application u d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Au lieu de la noter $u : \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array}$, on la note fréquemment $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voire (u_n).
u_n est appelé le terme général de la suite (ainsi que terme de rang n).
L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

REMARQUE 1 : On appellera désormais suite (réelle), toute application de $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 2 : Une suite (u_n) est dite :
- croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- constante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.

DÉFINITION 3 : La suite (u_n) est dite :
- majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

On peut définir une suite (u_n) de trois manières différentes.
- Définition explicite :
  Chacun des termes est exprimé en fonction de n.
  Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est définie de façon explicite.
- Définition par récurrence :
  Les premiers termes de la suite étant définis, un terme est défini en fonction des précédents. Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ est définie par récurrence.
- Définition implicite :
  On connaît l'existence de chacun des termes de la suite sans pour autant être en mesure de les exprimer de manière explicite. Ainsi, f étant une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir la suite (u_n) par $f(u_n) = n$.

II Convergence et divergence des suites

DÉFINITION 4 : Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel. On dit que (u_n) converge vers ℓ si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
On notera $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$.
Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Propriété 6 :
- On ne change pas la nature d'une suite si l'on change un nombre fini de termes.
- Si une suite (u_n) admet une limite ℓ alors celle-ci est unique.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' ; a et b deux réels.
  - la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
  - la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers $\ell \times \ell'$.
  - la suite $(a \times u_n + b \times v_n)$ converge vers $a\ell + b\ell'$.
  - de plus, si $\ell \neq 0$, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Propriété 7 : Toute suite convergente est bornée.

Illustration et démonstration :

III Suites arithmétiques et géométriques

III.1 Suites arithmétiques

Définition 5 : Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = r + u_n$.
r est appelé raison de (u_n).

Propriété 8 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

Démonstration :

III.2 Suites géométriques

DÉFINITION 6 : Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = qu_n$.
q est appelé raison de (u_n).

PROPRIÉTÉ 9 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $|q| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| > 1$ alors (u_n) diverge.

Démonstration :

- Cas où $|q| > 1$:
  Posons $|q| = 1 + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$.

- Cas où $|q| < 1$:

REMARQUE 2 : La suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

IV Suites adjacentes

DÉFINITION 7 : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- l'une est croissante, l'autre est décroissante.
- $\lim(\ u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2 : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

V Comportement des suites numériques

Théorème 3 : Théorème d'encadrement (ou des "gendarmes")
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques vérifiant :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
- il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq w_n \leq v_n$.

Alors (w_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

Théorème 4 : Théorème de comparaison
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N_0$, on a : $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = m_2$ alors $m_1 \leq m_2$.

Remarque 3 : Si $\forall n \geq N_0$, on a : $u_n < v_n$ alors $m_1 \leq m_2$. L'inégalité demeure (à priori) large.
En effet, $\forall n \geq 0$, on a : $\dfrac{1}{n+1} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Théorème 5 : Théorème de convergence de suites monotones
Toute suite majorée (respectivement minorée) croissante (respectivement décroissante) est convergente.
De plus, sa limite est inférieure (respectivement supérieure) à tout majorant (respectivement minorant).

Remarque 4 : Ce théorème reste vrai si la suite est monotone à partir d'un certain rang.

Exercice 4.1 *Etudier la convergence de la suite de terme général u_n tel que $u_0 = 1$ et*

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

VI Suites arithmético-géométriques

Définition 8 : Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$.

Déterminons l'expression de u_n en fonction de n à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique dans le cas où $a \neq 1$.

Soit ℓ la solution de l'équation $\ell = a\ell + b$. Il s'agit de la limite éventuelle de la suite (u_n).

Posons désormais $v_n = u_n - \ell$. On a :

Cette suite est donc une suite géométrique de raison $q = a$. Ainsi :

- si $|a| < 1$ alors la suite (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a}$.
- Si $|a| > 1$ ou $a = -1$ alors la suite (u_n) diverge.

Remarque 5 : Si a =1 alors la suite (u_n) est une suite arithmétique.

Exercice 4.2 *Exprimer, en fonction de n, le terme général de la suite (u_n) définie par* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

Chapitre 5

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

I Rappels et compléments

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{jbt}$. On a : $\varphi(t) = \cos(bt) + j\sin(bt)$.
Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi'(t) = -b\sin(bt) + jb\cos(bt) = jb\left[\cos(bt) + j\sin(bt)\right]$.
On a donc : $\varphi'(t) = jb\varphi(t)$ pour tout réel t.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{zt}$ et $z = a + jb$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
$f(t) = \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{jbt}$ donc, en dérivant le produit, on obtient : $f'(t) = (a\mathrm{e}^{at})\mathrm{e}^{jbt} + \mathrm{e}^{at}(jb\mathrm{e}^{jbt}) = (a + jb)\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{jbt}$.
Ainsi, $f'(t) = z\mathrm{e}^{zt}$ et, pour $z \neq 0$, la fonction $t \to \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}$ est une primitive de f.

Définition 1 : Fonction échelon unité u (appelée également fonction de Heaviside)
La fonction échelon unité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Ainsi, toute fonction étudiée dans ce chapitre telle que $f(t) = 0$ si $t < 0$ sera notée $t \mapsto f(t) \times u(t)$.

Définition 2 : Impulsion de Dirac (ou distribution de Dirac)
L'impulsion de Dirac est une mesure qui associe la valeur 1 au singleton $\{0\}$ et 0 à tout intervalle ne contenant pas 0.
On a donc : $\delta(\{0\}) = 1$ et $\delta(I) = 0$ pour tout I ne contenant pas 0.

δ peut être vue comme limite de la suite des fonctions δ_n telles que :
$\delta_n(x) = n$ pour $|x| < \frac{1}{2n}$ et $\delta_n(x) = 0$ ailleurs.

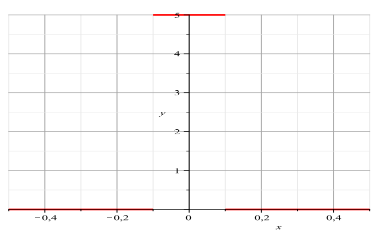

Figure 5.1 – Echelon avec $n = 5$

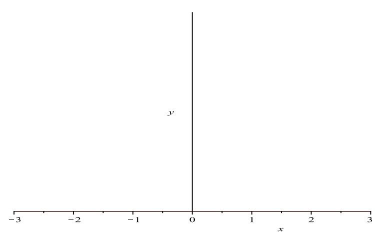

Figure 5.2 – Impulsion de Dirac

Remarque 1 : Il s'avère que : $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = \delta$ donc $\int_{\mathbb{R}} \delta = 1$.
δ peut être considérée comme une fonction qui prend une "valeur" infinie en 0, et la valeur 0 partout ailleurs et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.
En outre, δ peut s'écrire comme la limite suivante : $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x)-u(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$.
Ainsi, δ peut être considérée comme la "dérivée" de la fonction échelon unité.

II Généralités

Définition 3 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
La transformée de Laplace de f est la fonction, notée $\mathcal{L}\{f\}$, définie par :

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5.1

1. *Déterminer le domaine de convergence de* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$.
2. *Calculer les transformées de Laplace des fonctions* u *et* $f_\varepsilon : x \mapsto \frac{u(x)-u(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$ *où* $\varepsilon > 0$.
3. *En déduire la transformée de Laplace de* δ.

Remarque 2 : Conditions suffisantes de l'existence de la transformée de Laplace
Soit f est continue par morceaux sur $[0; a]$ pour tout réel $a > 0$.
Supposons qu'il existe deux réels $M > 0$ et α ainsi qu'un réel t_0 tels que : $\forall t \geq t_0$, on a : $|f(t)| < M\mathrm{e}^{\alpha t}$.
La transformée de Laplace de f est définie pour tout p tel que : $\mathrm{Re}(p) > \alpha$.

III Transformées de signaux usuels

1. **Distribution de Dirac :**

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta\}(p) = 1}$$

2. **Echelon unité :**

$$\boxed{\mathcal{L}\{u\}(p) = \frac{1}{p} \ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

3. **Fonction "Rampe" :** $t \mapsto tu(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}\{tu(t)\}(p) = \frac{1}{p^2} \ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

4. **Fonction "Puissances" :** $t \mapsto t^n u(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t^n u(t)\right\}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

5. **Fonction exponentielle :** $t \mapsto \mathrm{e}^{-at} u(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-at} u(t)\right\}(p) = \frac{1}{p+a} \ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(a+p) > 0}$$

En effet :

6. **Fonctions trigonométriques :**

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)u(t)\right\}(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)u(t)\right\}(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

En effet :

IV Propriétés

Théorème 1 : (Linéarité de la transformée de Laplace)
Soient f et g deux fonctions admettant une transformée de Laplace, λ et μ étant deux réels.

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$$

Cette égalité, découlant directement de la linéarité de l'intégrale, est vérifiée pour tout complexe p tel que les intégrales considérées convergent.

Théorème 2 : (Transformée de la dérivée)
Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace ainsi que sa dérivée.

$$\mathcal{L}(f')(p) = p \times \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$

En effet :

Remarque 3 : Si la fonction f n'est pas définie en 0, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(p) = p \times \mathcal{L}(f)(p) - f(0^+) \text{ où } f(0^+) = \lim_{0^+} f.}$$

Corollaire 2 : (Transformée de la dérivée seconde)
Soit f une fonction telle que f, f' et f" admettent une transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}(f")(p) = p^2 \times \mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

En effet :

Corollaire 3 : (Transformée de la dérivée n-ième)
Soit f une fonction dont les n dérivées successives admettent une transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n \cdot \mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1} f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

V Transformées de fonctions

Pour ce paragraphe on considèrera une fonction f avec $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
Les résultats énoncés le sont sous réserve de converge de l'intégrale associée à la transformée de laplace.

V.1 Transformée de $t \mapsto e^{-at}f(t)$

Théorème 3 : $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-at}f(t)\right\}(p) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(p+a)$

En effet :

Exercice 5.2 *Déterminer la transformée de Laplace du signal amorti* $g : t \mapsto e^{-2t}\sin(\omega t)u(t)$.

V.2 Transformée de $t \mapsto f(at)$ avec $a > 0$ (changement d'échelle)

Théorème 4 : $\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(p) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\right\}\left(\dfrac{p}{a}\right)$

En effet :

Exercice 5.3 *Calculer la transformée de* $g : t \mapsto 2tu(t)$ *en utilisant deux méhodes.*

V.3 Transformée de $t \mapsto tf(t)$ (produit par une rampe)

Théorème 5 : (Résultat admis)

$$\mathcal{L}\{t\,f(t)\}(p) = -\left(\mathcal{L}\{f\}\right)'(p)$$

Exercice 5.4 *Calculer la transformée de $f : t \mapsto te^{-at}$ en utilisant le résultat précédent.*

V.4 Transformée de $t \mapsto f(t-a)u(t-a)$ (décalage temporel avec $a > 0$)

Théorème 6 :

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)u(t-a)\right](p) = e^{-ap}\mathcal{L}\left[f(t)\,u(t)\right](p)$$

En effet :

Remarque 4 : Ainsi, un retard de a sur un signal se traduit par une multiplication par e^{-ap} de sa transformée.

Exercice 5.5 *Calculer la transformée de Laplace de* $t \mapsto tu(t-1)$.

V.5 Transformée de signaux périodiques

Soit f une fonction T-périodique de motif f_0. On a donc :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0; T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 7 : (Admis)

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \frac{\mathcal{L}\{f_0\}(p)}{1 - \mathrm{e}^{-pT}}$$

VI Transformation de Laplace inverse

Définition 4 : Soit F la transformée de Laplace d'une fonction f.
On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de F, la fonction f.
On note : $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$

Théorème 8 : (Admis)
Si les fonctions f considérées vérifient les conditions suffisantes d'existence de la transformée de Laplace, l'**original** f d'une fonction du type F est **unique**.

A retenir : Si F est une fraction rationnelle, on la décomposera en éléments simples.

Exercice 5.6 *Calculer les orignaux des fonctions suivantes définies par :*

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} \quad \textit{et} \quad G(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2(p+1)}.$$

VII Théorème de la valeur initiale ; Théorème de la valeur finale

Théorème 9 : Si les limites considérées existent, on a :

- $\lim\limits_{p\to+\infty} p\mathcal{L}\{f\}(p) = f(0^+)$ (valeur initiale)
- $\lim\limits_{p\to 0} p\mathcal{L}\{f\}(p) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (valeur finale)

Remarque 5 : Ces relations découlent de la relation : $\mathcal{L}(f')(p) = p \times \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$

VIII Applications aux équations différentielles

L'intégration d'une équation différentielle **linéaire**, à **coefficients constants**, s'effectue à l'aide de la transformée de Laplace de la façon suivante :

- Ecrire les transformées de Laplace de chaque membre de l'équation différentielle
- Exprimer la transformée de Laplace en fonction de p
- En déduire, par transformation inverse, la fonction solution de l'équation différentielle proposée

Exercice 5.7 *Résoudre l'équation différentielle*

$$x'(t) = -ax(t)$$

Exercice 5.8 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}^+$*, l'équation différentielle*

$$x"(t) + x(t) = 1$$

avec $x(0) = x'(0) = 0$.

Chapitre 6

SÉRIES NUMÉRIQUES

I Introduction

DÉFINITION 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Le réel S_n défini par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle de rang n.

REMARQUE 1 :
Pour une suite définie à partir d'un rang n_0 , les sommes partielles ne commenceront qu'au rang n_0.
On peut aussi réindexer les termes de la suite et ainsi considérer que celle-ci est définie à partir du rang 0.

DÉFINITION 2 : La suite (S_n) des sommes partielles s'appelle série de terme général u_n.
On la note : $\sum u_n$ voire $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple 4 *Exprimons S_n en fonction de n dans les cas suivants :*

- *Cas où (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.*

- *Cas où (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.*

II Nature des séries numériques

Pour ce paragraphe on considérera une suite (u_n) et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

DÉFINITION 3 : On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) admet une limite finie.
Cette limite est appelée somme de la série.
On note : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Notation : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$ alors on notera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 6.1 *Montrer que la série géométrique* $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 6.2 *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *et calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Définition 4 : On dira que la série de terme général u_n diverge si elle ne converge pas.

Exemple 5 *Exemples de séries géométriques*

- *La série géométrique* $\sum 2^n$ *diverge.*
  En effet :

- *La série* $\sum (-1)^n$ *est divergente.*
  En effet :

Remarque 2 : On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

PROPRIÉTÉ 10 : Condition nécessaire de convergence
Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

REMARQUE 3 : Attention, la condition n'est pas suffisante.
Par exemple la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

REMARQUE 4 : Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 6 *La série $\sum e^{\frac{1}{n}}$ diverge car le terme général tend vers 1.*
Ainsi, la suite de terme général $e^{\frac{1}{n}}$ converge mais la série associée diverge (grossièrement) !

III Nature de séries fondamentales

III.1 Séries géométriques

Considérons la série de terme général $u_n = q^n$:

Théorème 1 : La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
Lorsque $|q| < 1$, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

III.2 Séries de Riemann

Théorème 2 : La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 7 *La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge alors que la série $\sum \frac{1}{n^{1,2}}$ converge.*

REMARQUE 5 : Même si elles convergent lorsque $\alpha > 1$, en général, on ne connaît pas la valeur de la somme des séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
On verra l'année prochaine que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV Structure de l'ensemble des séries convergentes

Usuellement, on dit que l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Ainsi, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes et si a et b sont des réels alors la série $\sum(au_n + bv_n)$ est convergente.
On pourra donc écrire : $\sum(au_n + bv_n) = a\sum u_n + b\sum v_n$.

Remarque 6 : Pour avoir l'égalité précédente, Il faut que chacune des séries converge !
$\sum(u_n + v_n)$ peut converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent ...

Exercice 6.3 *Montrer que : si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

V Séries à termes positifs

Définition 5 : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ alors la série $\sum u_n$ est appelée série à termes positifs.

Propriété 11 : (Condition nécessaire et suffisante de convergence)
Une série à termes positifs est convergente si et seulement $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

Démonstration :
Pour tout entier n, on a : $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite des sommes partielles (S_n) est croissante.
Or, une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée donc $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

Théorème 3 : (Comparaisons de séries à termes positifs)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0.
- Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
- Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration :
Notons (S_n) et (S'_n) les sommes partielles associées respectivement aux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge alors (S_n) tend vers $+\infty$ donc (S'_n) tend vers $+\infty$.
  Il en résulte que la série $\sum v_n$ diverge.
- Si la série $\sum v_n$ converge alors (S'_n) est majorée.
  Comme $u_n \leq v_n$, on en déduit que (S_n) est majorée ce qui permet de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 6.4 *Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$.*

Exercice 6.5 *Déterminer la nature de la série de terme général* $v_n = \frac{1}{\ln(n)}$.
On pourra utiliser, après l'avoir démontré que, pour tout réel x *strictement positif, on a :* $x > \ln x$.

Théorème 4 : (Equivalents)
Considérons deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : Ce théorème découle du théorème précédent.

Exercice 6.6 *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$.

VI Convergence absolue

DÉFINITION 6 : La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème 5 : Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exercice 6.7 *Déterminer la nature des séries de terme général :* $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ *et* $v_n = \frac{\cos(na)}{n^2+1}$ *où* $a \in \mathbb{R}$.