Florent ARNAL

Cours sur les fonctions de plusieurs variables
Groupe B1
Semestre 4

Université de Bordeaux

Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site internet : http ://flarnal.e-monsite.com

2018

Table des matières

I Généralités

Définition 1 : Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On appelle fonction réelle de n variables toute application f telle que :

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}.$$

Remarque 1 : L'ensemble des réels $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ existe correspond à l'ensemble de définition de f.

Exemple 1 *La fonction* $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xsin(xy)}{x^2 + y^2}$ *est une fonction réelle de deux variables définie sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.

Définition 2 : On appelle surface représentative d'une fonction $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in X \times \mathbb{R} / z = f(x, y)\}$$

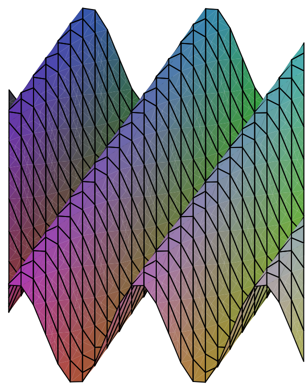

Figure 1 – Surface de la fonction $f : (x, y) \to sin(x + y)$

II Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

II.1 Limites

Définition 3 : Soit f une fonction définie au voisinage de (a, b).
On dit que la limite de la fonction f quand (x, y) tend vers (a, b) est ℓ si :
pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $r > 0$ tel que, pour tout (x, y) appartenant au disque de centre (a, b) et de rayon r, $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$.
On note : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$.

Remarque 2 : On définit les limites où $\ell = +\infty$ de manière analogue ...
En outre, les propriétés liées aux comparaisons, compositions, ... sont transposables aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 *Déterminer les limites suivantes :* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$.

II.2 Continuité et dérivabilité

DÉFINITION 4 : On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est continue en un point $a \in \mathcal{U}$ si $f \underset{a}{\to} f(a)$.
On dit que f est continue sur $\mathcal{U}$ si f est continue en tout point $a \in \mathcal{U}$.

REMARQUE 3 : Les théorèmes usuels sur la continuité demeurent vrais ...

DÉFINITION 5 :
Soient f une fonction définie sur un disque ouvert de centre $x_0 = (a, b)$ et $\overrightarrow{u} = (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.
On dit que f est dérivable en x_0 suivant le vecteur $\overrightarrow{u} = (h, k)$ si l'application
$\varphi_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a + th, b + tk) \end{cases}$ est dérivable en 0.
Dans ce cas, on appelle dérivée de f en x_0 suivant le vecteur $\overrightarrow{u} = (h, k)$, notée $D_{\overrightarrow{u}} f(x_0)$, le réel défini par :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t}$$

Exercice 2 *Soit $x_0 = (a, b)$ et f la fonction définie par : $f(x, y) = xy^2$.*

1. *Montrer que f est dérivable en x_0 selon le vecteur $\overrightarrow{u} = (h, k)$.*
2. *Déterminer la dérivée de f en $x_0 = (a, b)$ suivant $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$.*

DÉFINITION 6 :
Soient f une fonction définie sur un disque ouvert de centre $x_0 = (a, b)$ et $\overrightarrow{u} = (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.

- **La dérivée partielle** de f en x_0 par rapport à x,notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, correspond à la dérivée de f en $x_0 = (a, b)$ suivant le vecteur $\overrightarrow{i}$.
- **La dérivée partielle** de f en x_0 par rapport à y,notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, correspond à la dérivée de f en $x_0 = (a, b)$ suivant le vecteur $\overrightarrow{j}$.

Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t}$$

Exercice 3 *Déterminer les dérivées partielles de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = x + y^2$.

Remarque 4 : Dans la pratique, on dérive par rapport à une variable, en considérant les autres comme constantes.
En considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - 2xy$, on a :
$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2xy\right) =$..................

Remarque 5 : Les règles de calcul sont les mêmes que pour les dérivées des fonctions d'une variable.
Par exemple, pour un produit, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$$

Définition 7 : On dit qu'une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si ses dérivées partielles existent et sont continues.

Remarque 6 : Les fonctions polynomiales et rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème-Définition 1 : (admis)

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un disque ouvert alors f est dérivable en tout x_0 du disque suivant tout vecteur $\overrightarrow{u} = (h,k)$. On a :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)$$

- On dit alors que f est différentiable en x_0.

Exercice 4 *Déterminer la différentielle en* x_0 *de* $f : (x,y) \mapsto x$ *et* $g : (x,y) \mapsto y$.

Remarque 7 : L'application différentielle de f en $x_0 = (a,b)$ est l'application linéaire, à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $\mathrm{d}f(x_0)$ définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ par : $\mathrm{d}f(x_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)$.
On note usuellement : $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$.

II.3 Extremum d'une fonction

Définition 8 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un disque ouvert contenant x_0.
Le gradient de f au point x_0 est le vecteur

$$\overrightarrow{grad}f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix}$$

Exercice 5 *Déterminer le gradient en $x_0 = (a, b)$ de $f : (x, y) \mapsto xy^2$.*

Théorème 1 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un disque ouvert $\mathcal{U}$.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in \mathcal{U}$ alors

$$\overrightarrow{grad}f(x_0) = \overrightarrow{0}$$

Ce théorème indique que les extrema d'une fonction ne peuvent se produire qu'en un point où le gradient s'annule (point critique). Par contre, la réciproque est fausse.
En un point critique, il n'y a pas nécessairement un extremum pour la fonction. Considérons par exemple la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$.
L'origine $O(0\,;\,0)$ est donc un point critique, mais ce n'est pas un point ou la fonction admet un extremum comme le montre la représentation graphique de f donnée ci-dessous. La surface d'équation $z = x^2 - y^2$ présente une allure de "point selle" ou de col au voisinage de l'origine.

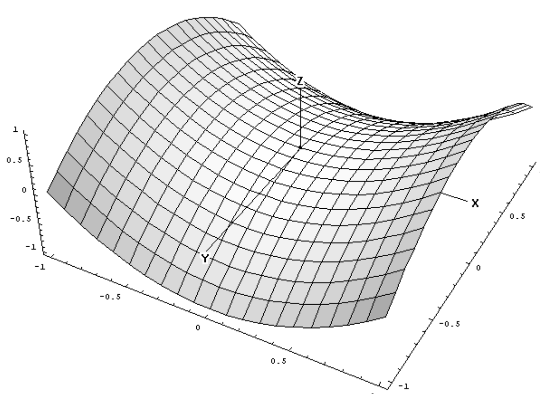

Figure 2 – Surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

Exercice 6 *Considérons la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4$.
Montrer que f *admet un extremum que l'on déterminera.*

II.4 Dérivées partielles d'ordre 2

DÉFINITION 9 : Soit $f : (x_1, x_2) \to f(x_1, x_2)$ une fonction définie sur un disque ouvert $\mathcal{U}$.
Pour i, j =1 ou 2, l'application $D_j(D_i f)$, si elle existe, est appelée dérivée partielle d'ordre 2 de f en sa i-ème puis j-ème variable. Celle-ci est notée $D_{j,i}f$.

REMARQUE 8 : Lorsqu'on convient de noter x et y les variables de f, on note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Exercice 7 *Déterminer les dérivées partielles d'ordre* 2 *de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x, y) = xe^{xy}$.

DÉFINITION 10 : On dit qu'une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si toutes les dérivées partielles jusqu'à ordre 2 de f existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Théorème 2 : (Théorème de Schwarz)
Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

III Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

III.1 Généralités

DÉFINITION 11 : Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathcal{U}$. La dérivée partielle de f au point $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ par rapport à la i-ème variable est définie, si elle existe, par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_i + t, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)}{t}$$

DÉFINITION 12 : Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathcal{U}$. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable au point a.
On appelle différentielle de f en a et on note $\mathrm{d}f(a)$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{d}f(a) : (h_1, h_2, ..., h_n) \mapsto \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} h_n.$$

REMARQUE 9 : La différentielle de$f$ en a est donc une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE 10 : Pour tout indice i, on note $\mathrm{d}x_i$ la forme linéaire définie par $\mathrm{d}x_i : h = (h_1, h_2, ..., h_n) \mapsto h_i$.
La différentielle de f s'écrit dans cette base : $\mathrm{d}f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ car $\mathrm{d}x_i(h) = h_i$.
Ainsi, pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathrm{d}z$$

REMARQUE 11 : La définition du gradient vue précédemment se généralise au cas de fonctions de n variables.
Ainsi, dans le cas de 3 variables, on a, au point $x_0 = (a, b, c)$:

$$\overrightarrow{grad} f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

III.2 Laplacien

DÉFINITION 13 : L'opérateur laplacien, ou simplement le laplacien, est un opérateur différentiel, noté Δ, égal à la somme de toutes les deuxièmes dérivées partielles non mixtes d'une variable dépendante. Ainsi :

$$\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Exercice 8 *Déterminer le laplacien de la fonction définie par* $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

IV Fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

IV.1 Divergent

DÉFINITION 14 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est appelée champ vectoriel.

Exemple 2 $f(x,y,z) = \left(x^3 - 6xyz, y^3 + 6xyz, z^3 - 6xyz\right)$ *notée également*

$$f(x,y,z) = \left(x^3 - 6xyz\right)\vec{i} + \left(y^3 + 6xyz\right)\vec{j} + \left(z^3 - 6xyz\right)\vec{k}.$$

est champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

DÉFINITION 15 : La divergence d'un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, noté $\operatorname{div}(f)$, est un champ scalaire donné par la relation :

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

En reprenant l'exemple précédent, on a :

$$\operatorname{div}(f) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

IV.2 Rotationnel

DÉFINITION 16 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le rotationnel d'un champ de vecteurs f, noté $\overrightarrow{\operatorname{rot}} f$, est défini par :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Remarque 12 :

- Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs.
- On note parfois : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$ voire $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$.

  L'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}$ est souvent appelé nabla et noté $\overrightarrow{\nabla}$.

  On a donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla}(f)$$

$$\text{div} f = \overrightarrow{\nabla}.f$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} f = \overrightarrow{\nabla} \wedge f$$

Exercice 9 *Soit f un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer div $\left(\overrightarrow{rot}(f)\right)$.*

V Exercices

Exercice 1 : On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que, pour tous réels x et y de $\mathcal{D}$, on a : $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.
3. En déduire $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x, y)$.

Exercice 2 : Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. En considérant $f\left(x, x^2\right)$, montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3 : Etudier les extrema (locaux et globaux) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 3 + y^2 + 6y$$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = x \arctan \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la différentielle de f.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 et vérifier que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 5 : Déterminer les éventuelles fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 y$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$.

Exercice 6 : Pour les fonctions suivantes, déterminer le divergent et le rotationnel.

- $f(x, y, z) = \left(xy, -y^2, z^2\right)$
- $f(x, y, z) = \left(2x - y, -yz^2, -y^2 z\right)$